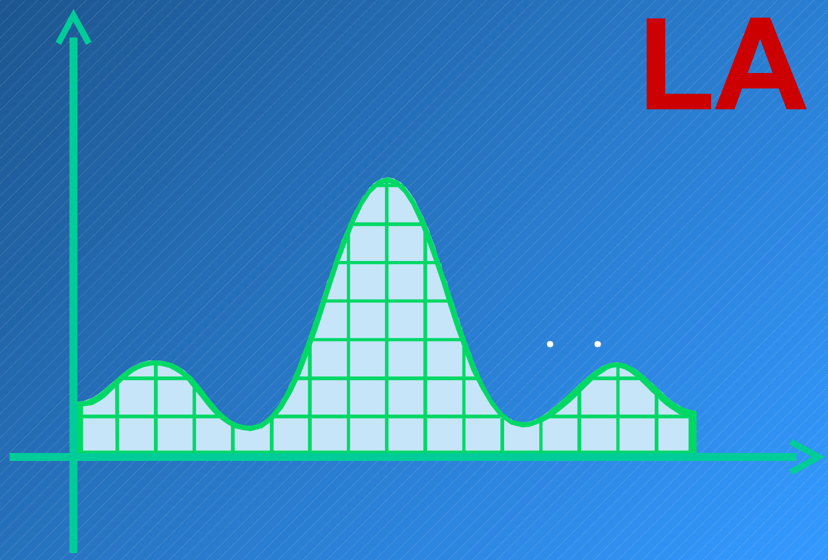
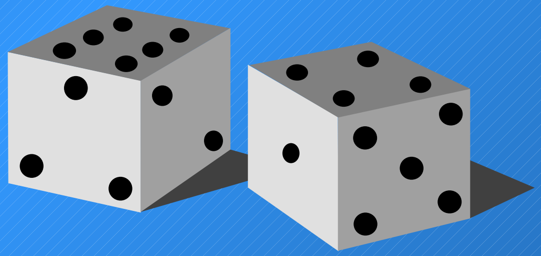
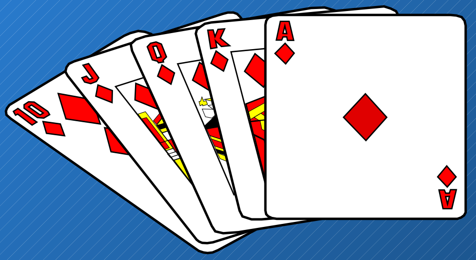
LA PROBABILITÀ







Spazio dei campioni
(o “spazio campionario”)

È l’insieme contenente <u>tutti</u> i possibili risultati di un esperimento

Esempio

Lancio di una moneta: quale sarà lo spazio dei campioni?

{ T, C }

Lancio di due monete: quale sarà lo spazio dei campioni?

{ TT, TC, CT,CC }

Evento

E' ogni singolo risultato che è possibile ottenere da un esperimento

- Evento semplice:
  evento non scomponibile in altri eventi
- Evento composto:
  evento scomponibile in eventi semplici

Esempi

- Evento semplice (a):
  uscita di un 3 nel lancio di un dado

- Evento composto (A):
  uscita di un numero pari nel lancio di un dado.

  Infatti è scomponibile in $\{2, 4, 6\} \in A$

Esito di un evento

- Successo:
  l’evento preso in considerazione si verifica

- Insuccesso:
  l’evento preso in considerazione non si verifica

Eventi incompatibili

Due eventi si dicono incompatibili (o mutualmente esclusivi) se il verificarsi di uno preclude il verificarsi dell'altro

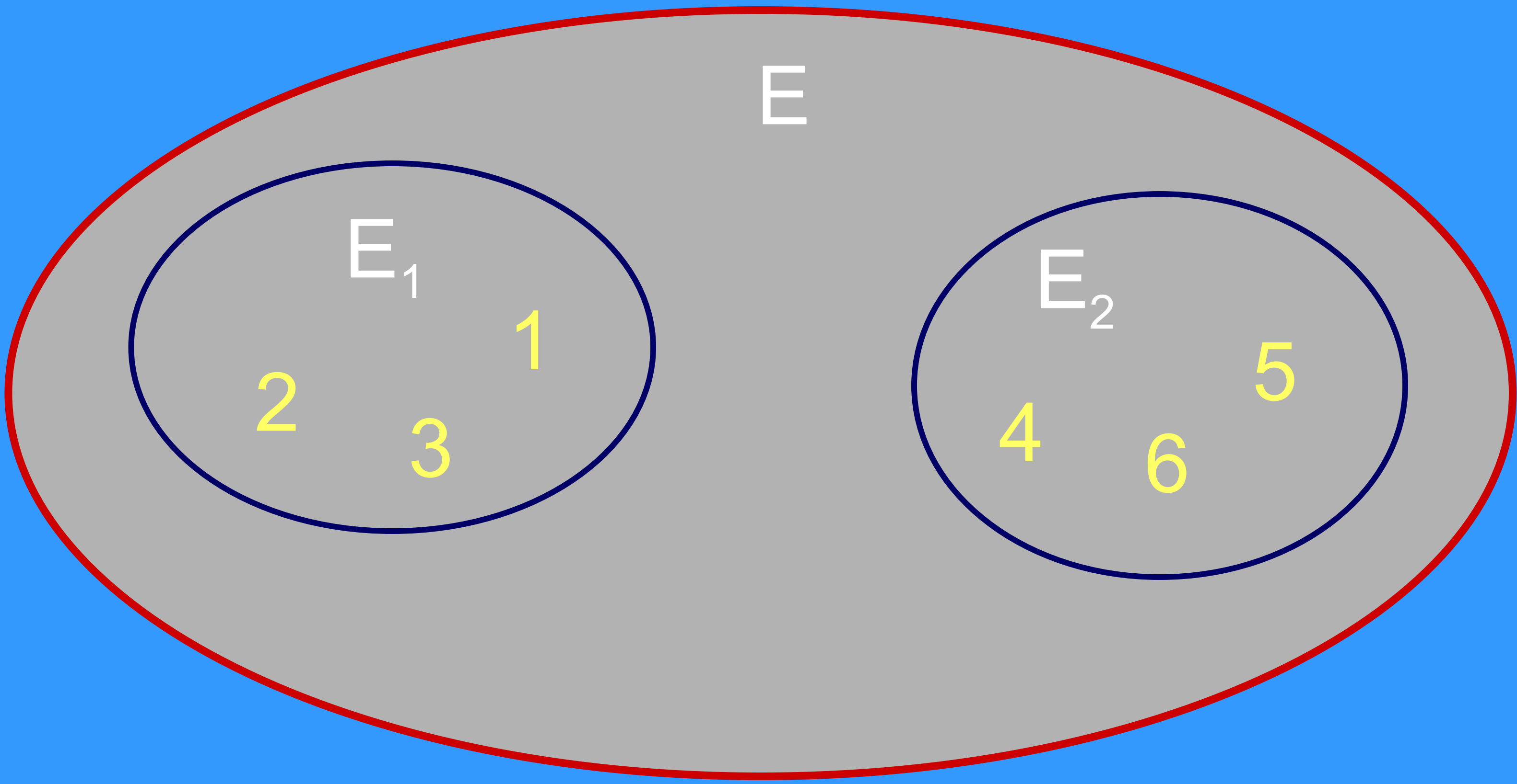
Es. Lancio di un dado

$E_1 = (1, 2, 3)$

$E_2 = (4, 5, 6)$

Rappresentazione con i diagrammi di Venn

Lancio di un dado



- E = evento *sicuro o certo,* infatti sicuramente uno degli elementi di E deve verificarsi

- Ø = insieme vuoto, anch’esso è un evento, *l’evento impossibile* perché contiene nessun evento, quindi nessuno dei sui eventi può verificarsi

Operazioni sugli insiemi

Dati due eventi A e B $\in$ E avremo:

- Unione: $A \cup B$ "A oppure B o entrambi"
- Intersezione: $A \cap B$ "sia A che B"
- Complementare di A rispetto ad E è $\bar{A}$ (non A)
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cup \bar{A} = E$
- Mutua esclusività se $A \cap B = \emptyset$

Esempio (con insiemi numerici):

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{4, 5, 6\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A \cap B = \{4\}$

$\bar{A} = \{5, 6\}$

Esercizio

Esperimento: lanciare due volte una moneta.

A è l’evento “si presenta almeno una testa”

B è l’evento “il risultato del secondo lancio è croce”

- Quali eventi semplici compongono A e B?
- Indicare gli insiemi unione, intersezione e complemento di A

$A = \{ TC, CT, TT \}$

$B = \{ TC, CC \}$

$A \cup B = \{ TC, CT, TT, CC \} = E$

$A \cap B = \{ TC \}$

$\bar{A} = \{ CC \}$

Definizione di probabilità

- Approccio classico: se ci sono *h* eventi favorevoli, dati *n* eventi tutti ugualmente possibili, la probabilità di successo sarà data da *h/n.*

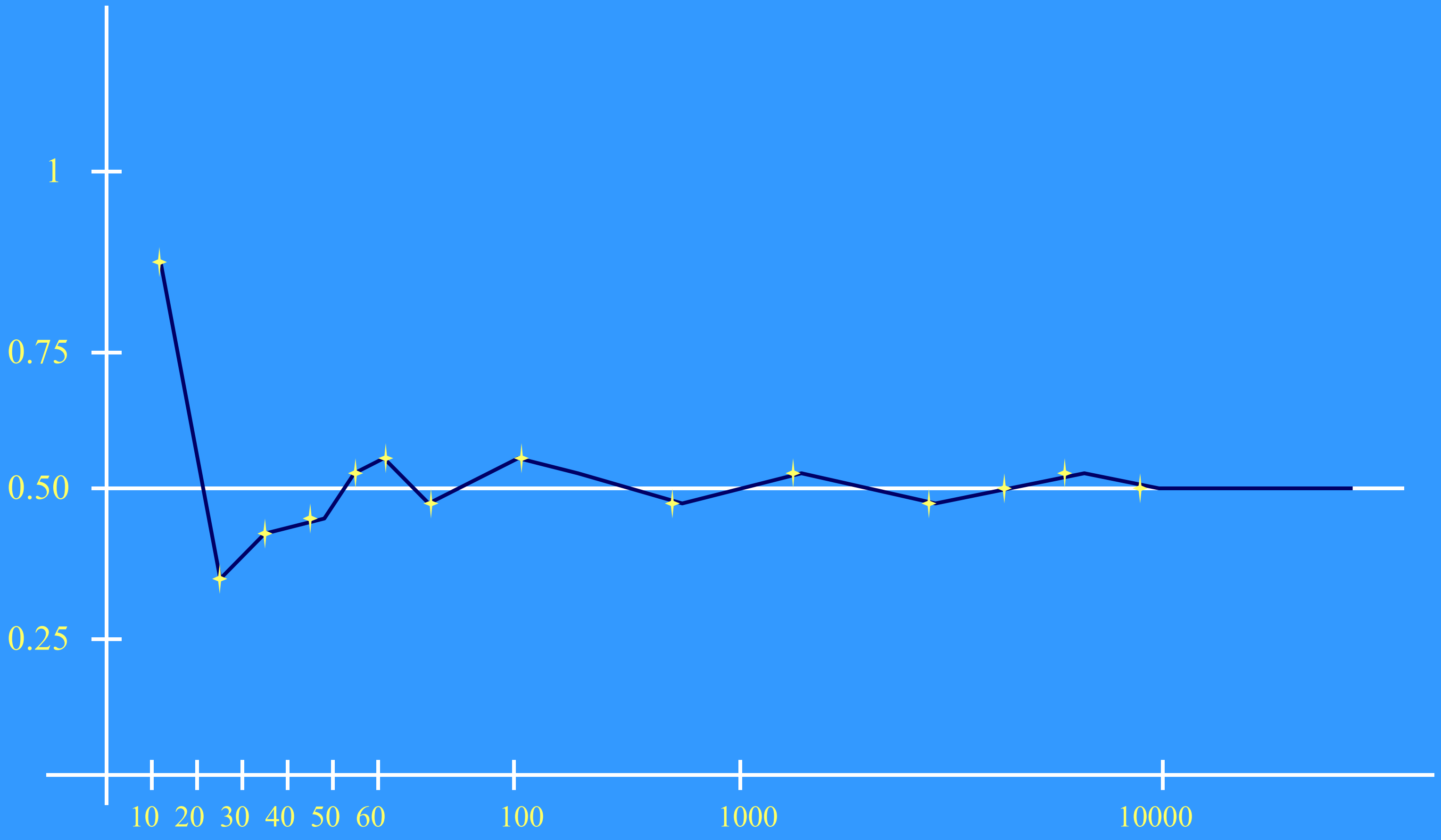
  Es. Se voglio stabilire la probabilità che esca testa lanciando una moneta so che gli eventi possibili sono 2, quello favorevole è 1, per cui la probabilità è 1/2 = 0.5 .

Definizione di probabilità

- Approccio frequentistico: se, dopo aver ripetuto n volte un esperimento (n deve essere molto grande), un certo evento si è verificato h volte, allora la probabilità di questo evento è h/n.

  Questo è chiamato anche approccio empirico alla probabilità.

Oscillazione della proporzione di successi



Assiomi della probabilità

Primo assioma

Dato un esperimento A:

$$0 \leq p(A) \leq 1$$

Es.

Uscita di un 7 nel lancio di un dado

$p(A) = 0$

Uscita di un numero ≤ 6

$p(A) = 1$

Secondo assioma
– Principio della probabilità totale –

Dati due eventi A e B $\in$ E, fra loro incompatibili, la probabilità di ottenere A o B, è uguale alla somma della probabilità di A più la probabilità di B, cioè:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Lo stesso principio può essere esteso a più di due eventi tra loro incompatibili.

Esempio

Estrazione di un asso o di un re da un mazzo di carte.

Si tratta di due eventi incompatibili (o mutualmente esclusivi), ovviamente rispetto alla singola estrazione.

$$p(A \cup R) = p(A) + p(R) = 4/52 + 4/52 = 1/13 + 1/13 = 2/13$$

In aula ci sono 70 studenti residenti a Pv, 80 residenti in altri comuni della provincia di Pv, 45 in altri comuni della Lombardia, e 65 residenti altrove. Se estraggo uno studente, quale è la probabilità che sia Lombardo?

Totale 260

$$p(L) = 70/260 + 80/260 + 45/260 = 195/260 = 0.75$$

Le probabilità sono proporzioni,

quindi

se elenchiamo tutti gli eventi possibili

e questi sono incompatibili

allora

la somma delle probabilità di questi

eventi deve essere

<u>= 1</u>

Principio della probabilità totale (enunciato generale)

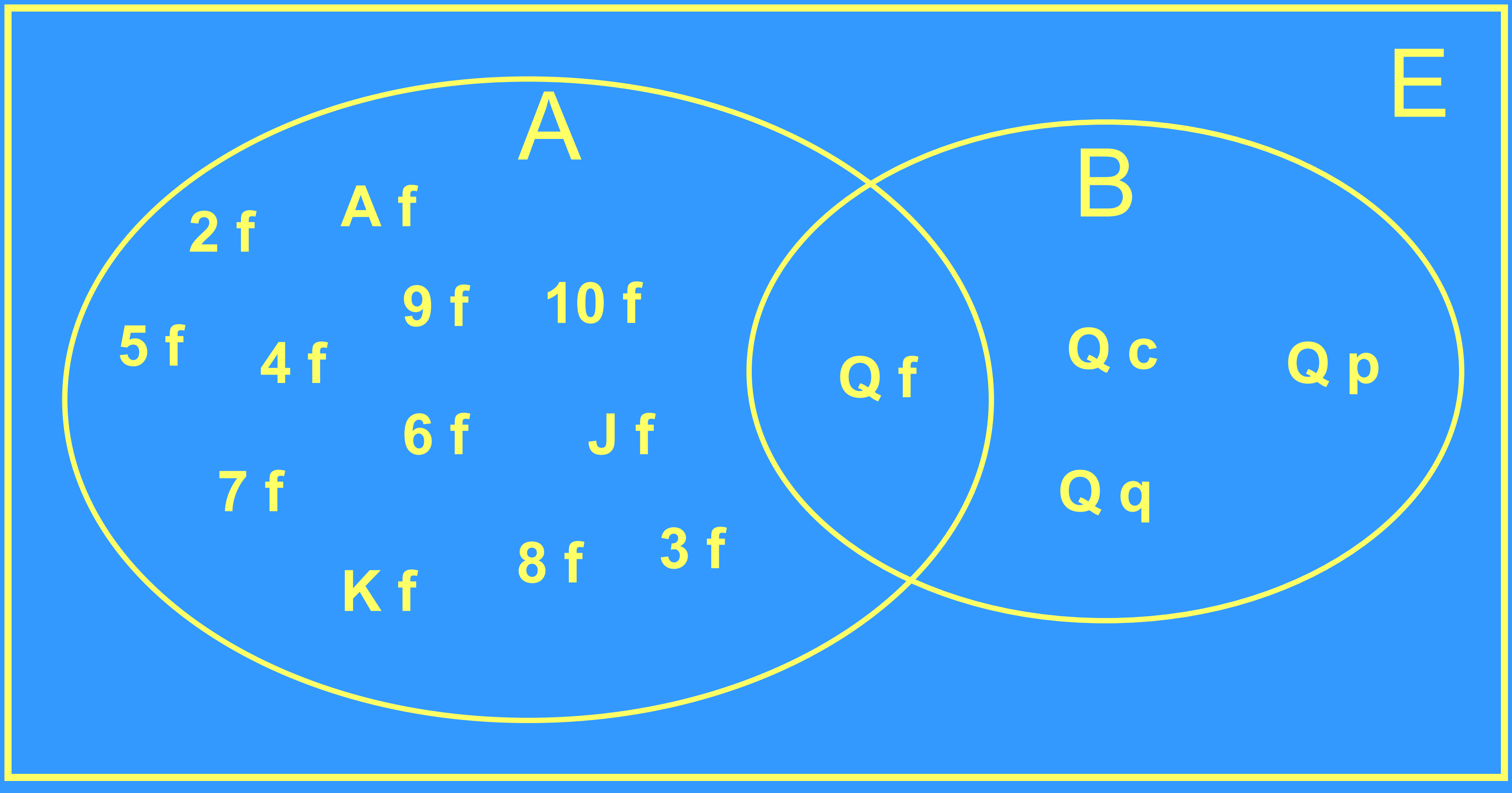
Dati due eventi A e B $\in$ E

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

dove $p(A \cap B)$ è la probabilità di ottenere contemporaneamente sia A, sia B.

Perché dobbiamo togliere p(A e B)?

Immaginiamo di voler stabilire la probabilità di estrarre da un mazzo o una carta di fiori (A) o una donna (B).



p(A) = 13/52 = 1/4 Carta di Fiori

p(B) = 4/52 = 1/13 Donna

Da cui

~~$p(A \cup B) = 1/4 + 1/13$~~

Ma abbiamo un evento congiunto:

la donna di fiori che è stata contata due volte, una in A e una in B

Quindi dovremo sottrarre una volta la sua probabilità:

$p(A \cup B) = 1/4 + 1/13 - 1/52 = 4/13$

Probabilità condizionata (o probabilità condizionale)

Per probabilità condizionata si intende il verificarsi di un evento B dopo che un evento A si è già verificato:

$$p(B|A)$$

si legge "probabilità di B, posto che A si sia verificato"

Esempio: suddivisione presenti per sesso e provenienza

	m (A)	*f (B)*	*Totale*
Pavia (C)	30	40	70
Prov. Pv (D)	42	38	80
Lombardia (E)	23	22	45
Altra resid. (F)	20	45	65
Totale	115	145	260

p (F|A)? 20/115 = 0.17

È diversa da p(F)? 65/260 = 0.25

Probabilità condizionata:

Dati due eventi A e B, non incompatibili, la probabilità che l'evento B si verifichi dato il verificarsi dell'evento A è

$$p(B \mid A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Indipendenza statistica

Due eventi si dicono indipendenti quando il verificarsi di uno non condiziona il verificarsi dell'altro.

Cioè se e solo se:

$$p(A|B) = p(A)$$

e

$$p(B|A) = p(B)$$

Sapere che una carta è rossa mi aiuta a predire se si tratta di un asso o meno?

Carte rosse 26, assi rossi 2

$p(A|R) = 2/26 = 1/13$

Se non sapessi che la carta estratta è rossa avrei:

$p(A) = 4/52 = 1/13$

Attenzione

Due eventi incompatibili, o mutualmente esclusivi
NON SONO INDIPENDENTI!

Infatti nel caso di eventi incompatibili abbiamo:

$$p(B|A) = p(A|B) = 0$$

Terzo assioma
— Principio della probabilità composta —

Se A e B sono due eventi qualsiasi, la probabilità di ottenere sia A che B è il prodotto della probabilità di ottenere uno di questi eventi per la probabilità condizionale di ottenere l'altro, posto che il primo si sia verificato.

$$p(A \cap B) = p(A)*p(B|A) = p(B)*p(A|B)$$

Probabilità composta nel caso di eventi indipendenti

Se due eventi sono indipendenti

$$p(B|A) = p(B)$$

quindi la probabilità composta sarà:

$$p(A \cap B) = p(A)*p(B)$$

Esempio

Probabilità di estrarre da un mazzo un asso di cuori

$$p(A \cap C) = 4/52 * 13/52 = 1/52$$

Probabilità di ottenere testa in due lanci successivi

$$p(T \cap T) = 0.5 * 0.5 = 0.25$$

Ipotesi: scommessa su un gruppo di quattro lanci

Sequenze		Probabilità
TTTT		p = 0.5*0.5*0.5*0.5 =0.0625
TTTC, TTCT	TCTT, CTTT	p = 0.0625 * 4 = 0.25
TTCC, TCTC, CTTC	TCCT, CTCT, CCTT	p = 0.0625 * 6 = 0.375
CCCT, CCTC	CTCC, TCCC	p = 0.0625 * 4 = 0.25
CCCC		p = 0.5*0.5*0.5*0.5 =0.0625

Probabilità totale → p(somma) = 1

Esempio di probabilità composta con eventi dipendenti

Calcolare, con riferimento alla tabella dei presenti la probabilità di estrarre una femmina e pavese

$p(F) = 145/260 \qquad p(Pv|F) = 40/145$

$p(F \cap Pv) = p(F) * p(Pv|F) = 145/260 * 40/145 = 40/260 = 0.154$

$p(Pv) = 70/260 \qquad p(F|Pv) = 40/70$

$p(F \cap Pv) = p(Pv) * p(F|Pv) = 70/260 * 40/70 = 40/260 = 0.154$

Sistema completo di alternative

Si definisce "sistema completo di alternative" un insieme di n eventi H_1, H_2, … H_n a due a due incompatibili e che esauriscono tutte le possibilità dell'universo.

Esempio:

se esaminiamo il sistema scolastico italiano uno studente può frequentare l'ordine tecnico-professionale (H_1), umanistico (H_2) o scientifico (H_3).

Esercizio:

Calcolare la probabilità di raggiungere il diploma (evento D) entro il 18° anno nel sistema scolastico italiano.

Le ipotesi sono che $p(H_1) = 45\%$, $p(H_2) = 30\%$ e $p(H_3) = 25\%$ inoltre si sappiamo che $p(D|H_1) = 60\%$, $p(D|H_2) = 90\%$ e $p(D|H_3) = 70\%$

$$p(D) = p(D \cap H_1) + p(D \cap H_2) + p(D \cap H_3)$$

cioè

$$p(D) = p(H_1)p(D|H_1) + p(H_2)p(D|H_2) + p(H_3)p(D|H_3)$$

Nel caso in esame:

$p(D) = 45\%\ 60\% + 30\%\ 90\% + 25\%\ 70\% = 71.5\%$

Teorema di Bayes (della scelta)

Se H_1, H_2, …, H_n, costituiscono un sistema completo di alternative per un universo E ed A è un evento non impossibile, allora per ogni $k \in \{ 1, 2, \dots , n \}$ si ha

$$p(H_k \mid A) = \frac{p(H_k)\, p(A \mid H_k)}{\sum_{i=1}^{n} p(H_i)\, p(A \mid H_i)}$$

Esercizio:

Nelle ipotesi dell'esercizio precedente calcolare la probabilità di avere un diplomato (evento D) proveniente dall'ordine professionale (evento H_1) cioè $p(H_1|D)$.

Applicando il teorema di Bayes otteniamo:

$$p(H_1|D) = 45\%\ 60\% \ / \ (45\%\ 60\% + 30\%\ 90\% + 25\%\ 70\%) =$$

$$37.8\%$$

Distribuzione binomiale

Una variabile X si distribuisce secondo una binomiale se un esperimento ha solo due risultati possibili.

Possiamo usare la binomiale anche quando l'esperimento ha più di due risultati possibili, è sufficiente renderlo dicotomico.

Esempi di dicotomizzazione

- Lancio di un dado:

5 = successo, altri risultati = insuccessi

- Campione di famiglie:

famiglie fino a 3 componenti = successo

famiglie con più di 3 componenti = insuccesso

Occorre, a questo punto, assegnare un livello di probabilità ad ognuno dei due eventi.

- Chiameremo p la probabilità di successo
- Chiameremo q la probabilità di insuccesso

$$\Rightarrow p + q = 1$$

- Moneta

  $p = 0.5$ $q = 0.5$

$$p + q = 1$$

- Ottenere 5 con il lancio del dado

  $p = 1/6$ $q = 5/6$

$$p + q = 1$$

Formula della binomiale

$$p(X) = \frac{N!}{X!(N-X)!} p^X q^{N-X}$$

p(X) = probabilità di ottenere X successi in N prove

N! è noto come “N fattoriale” ed è il prodotto sequenziale dei primi N numeri naturali

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$0! = 1$

Esempio
X teste in 4 (N) lanci

$$p(0) = \frac{4!}{0! \cdot (4-0)!} \cdot 0.5^0\, 0.5^4 = 0.0625$$

$$p(1) = \frac{4!}{1! \cdot (4-1)!} \cdot 0.5^1\, 0.5^3 = 0.25$$

$$p(2) = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} \cdot 0.5^2\, 0.5^2 = 0.375$$

$$p(3) = \frac{4!}{3! \cdot (4-3)!} \cdot 0.5^3\, 0.5^1 = 0.25$$

$$p(4) = \frac{4!}{4! \cdot (4-4)!} \cdot 0.5^4\, 0.5^0 = 0.0625$$

1

Esercizio

Sapendo che la probabilità che ad uno studente di psicologia piaccia la statistica è 0.2, qual è la probabilità che estraendo a sorte 8 soggetti:

1. A due di essi piaccia la statistica

2. A nessuno piaccia la statistica

3. A più di due piaccia la statistica

Soluzione

$p = 0.2 \qquad\qquad q = 0.8$

1. $p(2) = \dfrac{8!}{2! \cdot (8-2)!} \cdot 0.2^2\, 0.8^6 = 0.2936$

2. $p(0) = \dfrac{8!}{0! \cdot (8-0)!} \cdot 0.2^0\, 0.8^8 = 0.1678$

3. $p(1) = \dfrac{8!}{1! \cdot (8-1)!} \cdot 0.2^1\, 0.8^7 = 0.3355$

$p(X>2) = 1 - (0.2936 + 0.1678 + 0.3355) = 0.2031$

1