L.M. Gratton
Università degli Studi di Trento
Facoltà di Scienze

Esempio di proposta didattica relativo alle attività del terzo anno sull'EFFETTO SERRA

VERIFICA DELLA LEGGE DI STEFAN-BOLTZMANN

Introduzione

Un corpo nero è un oggetto che assorbe tutta la radiazione elettromagnetica incidente (e quindi non ne riflette). Poiché si osserva che la temperatura T di un corpo nero che scambi energia con l'ambiente circostante (che si trovi ad un determinata temperatura T_a con $T_a > T$) non cresce indefinitamente, esso deve perdere energia per irraggiamento. La legge di Stefan-Boltzmann descrive in generale il modo con cui questa energia viene irraggiata. La sua espressione è:

$$W = S\varepsilon\sigma T^4$$

Dove *W* rappresenta l'energia irraggiata nell'unità di tempo (la potenza irraggiata), *S* rappresenta la superficie emittente, ε il coefficiente di emissività totale o emmittanza, σ è la costante di Stefan-Boltzmann ($\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$) e *T* la temperatura (espressa in gradi Kelvin) del corpo nero.

Per quanto riguarda l'emissività totale ricordiamo che essa è definita come il rapporto tra la potenza emessa da un corpo ordinario e quella che verrebbe emessa da un corpo nero della medesima forma e alla stessa temperatura. Pertanto si ha $0 \le \varepsilon \le 1$, con $\varepsilon = 1$ per il corpo nero ideale e 0 per un corpo ideale perfettamente riflettente.

La comprensione delle leggi che governano il funzionamento del corpo nero è fondamentale per la fisica ed è stato uno dei punti cardine per lo sviluppo della meccanica quantistica, tuttavia la legge di Stefan-Boltzmann può essere dedotta a partire da considerazioni puramente termodinamiche, senza fare uso della meccanica quantistica. Pertanto può essere introdotta anche prima di trattare il concetto di quanto.

Da un punto di vista didattico può essere interessante far osservare agli studenti quanto sia importante tener conto dei principi della termodinamica quando si considerino scambi di energia.

Consideriamo un corpo nero, alla temperatura *T*, che irraggi verso l'ambiente circostante, che si trova alla temperatura T_0; l'ambiente circostante riceve l'energia irraggiata ma a su volta irraggia energia. Il primo principio ci permette di scrivere il bilancio energetico. Nell'ipotesi che corpo nero e ambiente costituiscano un sistema isolato si può scrivere:

$$W_s = W_e - W_a$$

W_s è la potenza netta scambiata dal corpo nero che è pari alla potenza emessa dal corpo nero W_e alla temperatura *T* meno la potenza emessa dall'ambiente alla temperatura T_0 ed assorbita dal corpo nero W_a. All'equilibrio si ha $W_s = 0$. Le espressioni di W_e e W_a sono:

$$W_e = S\varepsilon\sigma T^4$$

$$Wa = S\alpha\varepsilon_0\sigma T_0^4$$

Dove α è il coefficiente di assorbimento del corpo nero ed ε_0 il coefficiente di emissività totale dell'ambiente. Poiché all'equilibrio $T = T_0$ si ha:

$$\varepsilon = \alpha\varepsilon_0$$

Quindi lo scambio energetico in un istante generico può essere scritto nella forma:

$$W = S\,\varepsilon\sigma\left(T^4 - T_0^4\right)$$

Se il sistema corpo nero e l'ambiente sono isolati dal resto dell'universo raggiungeranno prima o poi l'equilibrio ad una certa temperatura e non si scambieranno più energia. Ne consegue che il coefficiente di assorbimento e quello di emissione devono essere uguali.

Un modo più corretto di ricavare questa importante proprietà è il seguente: se il corpo nero e l'ambiente si trovano alla stessa temperatura lo scambio netto di energia **deve** essere nullo altrimenti l'uno si riscalderebbe rispetto all'altro. Si potrebbe allora costruire una macchina termica che sfrutti questa differenza di temperatura per produrre del lavoro. Poiché , come abbiamo detto prima, il corpo nero e l'ambiente si trovavano alla stessa temperatura (costituivano cioè un'unica sorgente) verrebbe violato il secondo principio della termodinamica. Ne consegue che il coefficiente di assorbimento e quello di emissione devono essere uguali. Questa proprietà è generale e vale per tutti i corpi, e a tutte le lunghezze d'onda (frequenze). Il ragionamento basato sul secondo principio della termodinamica, che porta a questa conseguenza, è analogo a quello qui proposto.

A noi qui interessa una non tanto ricavare teoricamente la legge ma suggerire un metodo sperimentale per verificarla..
La verifica della legge ci permetterà inoltre di affrontare una serie di problematiche sperimentali di notevole interesse come vedremo in seguito.

Per verificare questa legge possiamo intanto semplificare la relazione. Ciò può essere fatto mettendosi in una situazione in cui sia trascurabile il termina T_o^4 rispetto a T^4 (cioè ad alta temperatura). La relazione precedente diviene allora:

$$W^* = \sigma T^4$$

Dove con W^* si è indicata la potenza emessa per unità di area e si è posto (per approssimazione) ε=1.

A questo punto sarebbe comodo utilizzare i logaritmi e scrivere:

$$\ln W^* = \ln \sigma + 4 \ln T$$

Cioè riportando i dati della potenza in funzione della temperatura su un grafico log/log si dovrebbe (entro gli errori di misura) ottenere una retta di pendenza 4. L'intercetta, note le caratteristiche geometriche del corpo nero, fornirebbero un valore sperimentale per la costante di Stefan-Boltzmann.

Poiché al livello del biennio di una scuola superiore, al quale si rivolge la presente proposta curricolare, non sono ancora note le proprietà dei logaritmi, converrà procedere in un'altra maniera, come vedremo di seguito.

L'apparato sperimentale e considerazioni preliminari

L'apparato sperimentale è costituito da una lampadina di un faro di automobile (il cui filamento incandescente sarà il nostro corpo nero), un alimentatore variabile in corrente continua (possibilmente stabilizzato), una termopila e un voltmetro. Per alcune misure è necessario un secondo voltmetro (o meglio amperometro). E' meglio che l'alimentatore sia in corrente continua per facilitare le misure di resistenza che dovremo effettuare. Tutti gli apparati sono di facile reperibilità nei laboratori scolastici, tranne forse la termopila. In ogni caso il costo di una buona termopila è attorno ai 150-200 euro.

La termopila è lo strumento che ci permetterà di misurare la potenza emessa dal corpo nero. E' necessario utilizzare una termopila perché presenta una curva di risposta spettrale piatta per la radiazione elettromagnetica che va dal vicino ultravioletto al lontano infrarosso. Questa è proprio la zona spettrale dove è emessa la quasi totalità della radiazione di un filamento incandescente.

Per la buona riuscita dell'esperimento è necessario che l'ambiente sia oscurato (l'unica sorgente di luce deve essere la lampadina di automobile) ed inoltre bisogna evitare che la termopila "veda" oggetti "caldi", ad esempio il corpo dello sperimentatore. La termopila, essendo sensibile anche alla radiazione nel lontano infrarosso, risponde alla presenza di oggetti caldi che possono avere una superficie grande e pertanto la potenza totale emessa può essere confrontabile con quella del filamento (molto cado ma anche molto piccolo). Può dare fastidio anche la radiazione infrarossa riflessa, questa volta emessa sia dal filamento, e riflessa per esempio dal tavolo su cui si lavora, che da altre sorgenti. Per evitare ciò è necessario utilizzare degli schermi "freddi" che permettano soltanto alla radiazione emessa dal filamento di raggiungere la termopila.

Ancora qualche considerazione preliminare va fatta in relazione al corpo nero scelto cioè il filamento della lampadina.

In realtà non si tratta di un "vero" corpo nero. Il filamento è fatto di tungsteno e presenta alcuni problemi che bisogna conoscere per interpretare le eventuali incongruenze con i risultati attesi dagli esperimenti.

Gli inconvenienti sono dovuti al fatto che il coefficiente di emissività totale non soltanto non vale 1 come si vorrebbe (si parlerebbe allora di corpo grigio per il quale vale ancora il concetto di emissività totale con ε<1) ma l' emissività dipende dalla lunghezza d'onda e dalla temperatura: si parla più correttamente di emissività o potere emissivo spettrale.

L'emissività spettrale può essere definita come il rapporto tra la potenza per unità di superficie emessa dal corpo in questione alla lunghezza d'onda λ e alla temperatura T, e la corrispondente potenza per unità di superficie emessa dal corpo nero alla stessa lunghezza d'onda e temperatura:

$$\varepsilon(\lambda,T)=\frac{W(\lambda,T)}{W_c(\lambda,T)}$$

Per definizione si chiama corpo grigio un sistema fisico per il quale si abbia:

$$\varepsilon(\lambda,T)=\varepsilon=\text{costante}$$

Nel caso dei corpi grigi l'emissività spettrale coincide con quella totale (notare che in questo caso si ha ε<1).

Quanto detto non dovrebbe costituire un grave problema per le misure che ci proponiamo di effettuare perché qui non si è interessati al valore assoluto della potenza emessa, o alla misura della costante di Stefan-Boltzmann, ma solo alla dipendenza della potenza dalla temperatura.

Come docenti si deve essere consapevoli di ciò, ma si **deve** fare l'ipotesi che l'effetto sia trascurabile altrimenti non ha senso procedere. A posteriori si vedrà se le deviazioni dai valori attesi potranno eventualmente essere attribuiti a questo fatto. Una discussione approfondita sui risultati da fare con gli studenti sarà comunque utile.

Misure preliminari

Il primo problema che si deve affrontare consiste nel determinare un metodo per misurare la temperatura del filamento di tungsteno.

Si suppone che gli studenti abbiano lavorato sulla resistività dei conduttori e sulla resistenza ed inoltre sappiano che la resistività dipende dalla temperatura. Inoltre conoscano le leggi di Ohm:

$$R=\rho\frac{l}{S} \qquad\qquad R=\frac{V}{I}$$

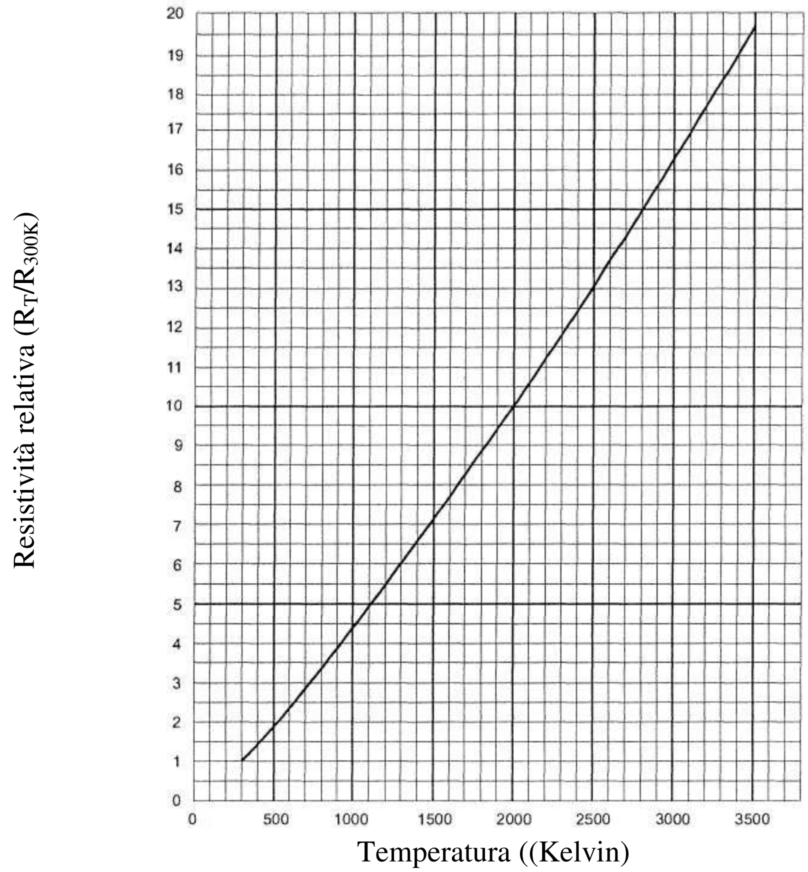
In caso contrario è il momento di introdurre questi concetti.

In internet si possono trovare tabelle e grafici relativi alla dipendenza della resistività del tungsteno in funzione della temperatura. Di seguito ci sono due esempi.

Tabella temperatura e Resistività del Tungsteno

R/R_{300K}	Temp ^{0}K	Resistività μΩcm	R/R_{300K}	Temp ^{0}K	Resistività μΩcm	R/R_{300K}	Temp °K	Resistività μΩcm	R/R_{300K}	Temp °K	Resistività μΩcm
1.0	300	5.65	5.48	1200	30.98	10.63	2100	60.06	16.29	3000	92.04
1.43	400	8.06	6.03	1300	34.08	11.24	2200	63.48	16.95	3100	95.76
1.87	500	10.56	6.58	1400	37.19	11.84	2300	66.91	17.62	3200	99.54
2.34	600	13.23	7.14	1500	40.36	12.46	2400	70.39	18.28	3300	103.3
2.85	700	16.09	7.71	1600	43.55	13.08	2500	73.91	18.97	3400	107.2
3.36	800	19.00	8.28	1700	46.78	13.72	2600	77.49	19.66	3500	111.1
3.88	900	21.94	8.86	1800	50.05	14.34	2700	81.04	26.35	3600	115.0
4.41	1000	24.93	9.44	1900	53.35	14.99	2800	84.70			
4.95	1100	27.94	10.03	2000	56.67	15.63	2900	88.33			

Grafico temperatura/resistività del Tungsteno



Nella tabella e nel grafico sono riportati, in funzione della temperatura, il rapporto tra la resistività del tungsteno ad ogni temperatura e il valore della resistività dello stesso tungsteno alla temperatura di riferimento di 300K. Pertanto se si suppone che non ci siano modifiche apprezzabili nella geometria (dimensioni) del filamento al variare della temperatura, si può supporre che tale rapporto sia uguale quello che c'è tra il valore della resistenza del filamento ad una data temperatura e quello alla temperatura di riferimento.

Il problema consiste quindi nel misurare la resistenza del filamento alla temperatura di riferimento (che si supporrà essere la temperatura ambiente) e poi il valore della resistenza nelle condizioni in cui si effettueranno le misure di potenza emessa.

Agli studenti verrà quindi chiesto di fare il rapporto tra questi valori e risalire quindi alla temperatura del filamento utilizzando il grafico o, meglio, per interpolazione lineare a partire dalla tabella. Questo ultimo metodo è più preciso ed anche didatticamente più interessante.

Il passo seguente è la misura della resistenza.

Questa misura può essere effettuata utilizzando un opportuno circuito elettrico. Il circuito può essere montato in due modi diversi. (Si noti che si utilizzano due strumenti: misura voltamperometrica)

1) Primo circuito come rappresentato in figura 1

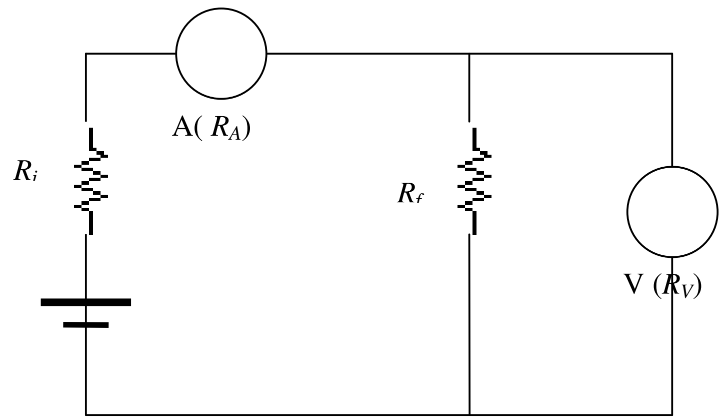


Figura 1

R_i, R_f, R_A ed R_V, sono la resistenza interna del generatore, la resistenza del filamento della lampadina, la resistenza interna dell'amperometro e la resistenza del voltmetro.

In questo modo misuriamo la tensione ai capi della lampadina e la corrente che circola all'interno. Questo tipo di misura è valida se la resistenza del filamento è molto più piccola della resistenza interna del voltmetro, in questo modo infatti la corrente che circola nel voltmetro e che quindi non viene misurata è trascurabile.

2) Secondo circuito come rappresentato in figura:

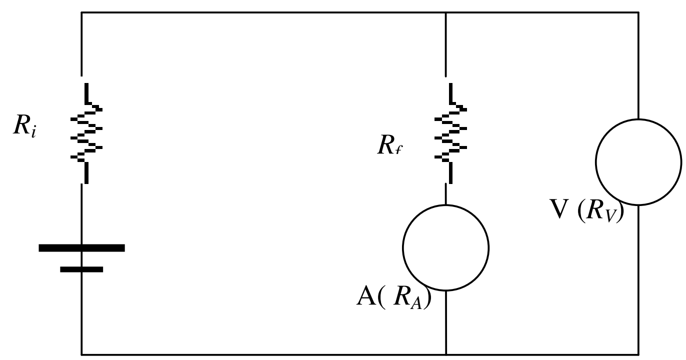


Figura 1

Il circuito in figura 2 non va bene per la misura della resistenza un filamento perché R_A è maggiore di quella del filamento!.

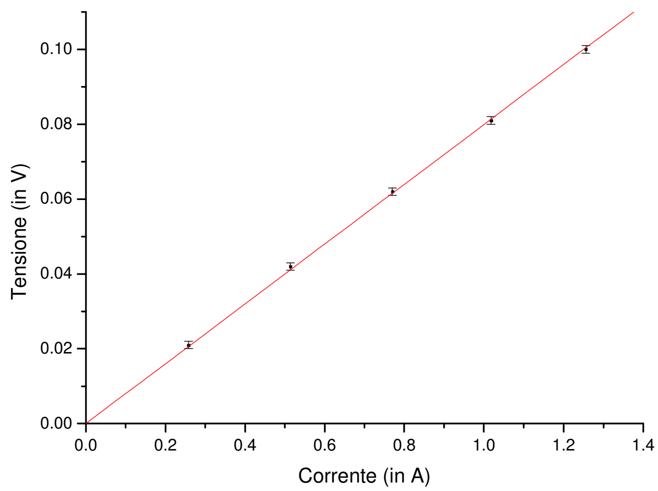
Il motivo di presentare le due modalità di effettuare una misura voltamperometrica è puramente didattico, infatti una discussione con gli studenti deve portare alla scelta del primo metodo per minimizzare le incertezze di misura.

Poiché il valore della resistenza del filamento è molto piccola è necessario tener conto della resistenza dei conduttori che si utilizzano per il collegamento. Per misurare la resistenza dei conduttori è necessario montare un circuito identico a quello di figura 1 in cui si fa "cortocircuito (tra i conduttori). Lo schema è analogo a quello di figura 1 dove si porrà R_{fili} (resistenza dei conduttori) al posto di R_f.

1) Dopo aver costruito il circuito facciamo delle misure di corrente e di tensione.

Tensione (mV) ±1 mV	Corrente (mA) ±1 mA
21	258
42	514
62	770
81	1018
100	1256

Con i dati in tabella si ricava il seguente grafico:



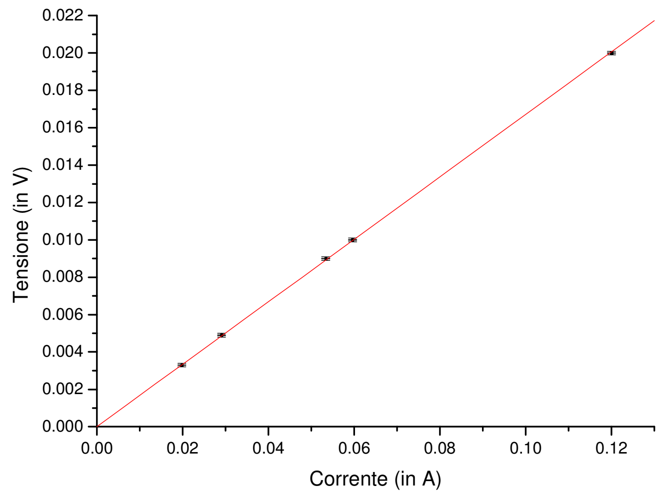
Dalla pendenza della retta si ottiene un valore per la resistenza dei fili di (0.080±0.001)Ω.

Misuriamo ora la resistenza del filamento con un circuito analogo al precedente in cui ora è inserito anche la lampadina (il filamento). La resistenza complessiva R che misureremo, sarà quindi la somma di quella dei fili R_{fili} più quella del filamento R_f.

Si ottengono i seguenti risultati: (**NB**: in questa misura bisogna porre molta attenzione a non riscaldare il filamento, pertanto si debbono utilizzare correnti molto basse. A posteriori si deve notare che la dipendenza di V da I deve essere lineare!)

Tensione (mV) ±0.1 mV	Corrente (mA) ±0.1 mA
20.0	120.0
10.0	59.6
9.	53.4
4.9	29.1
3.3	19.8

Con i dati di tabella si ottiene il seguente grafico

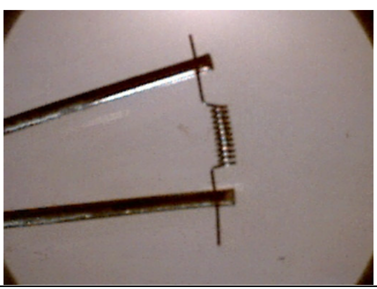
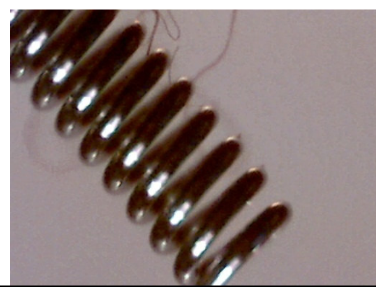
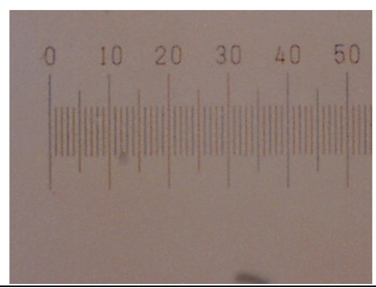


Dalla pendenza della retta si ricava per R un valore di (0.167±0.001)Ω.

Finalmente, per differenza, otteniamo il valore delle resistenza del filamento a temperatura ambiente: R_f=(0.087±0.002)Ω.

È didatticamente interessante confrontare questo valore con quello che si ricava a partire dalle dimensioni geometriche del filamento che si possono stimare con l'uso di un microscopio a basso ingrandimento.

Qui sono riportate le foto al microscopio del filamento di una lampada (alla quale è stato tolto il vetro). Con l'aiuto di un calibro o di un micrometro e della scala in foto si possono ricavare le informazioni necessarie per calcolare la resistenza del filamento note il diametro del filo di tungsteno e la sua lunghezza.

		
Filamento visto al microscopio (10 X)	Filamento (60 X)	Scala di riferimento (60 X) NB: la divisione più piccola corrisponde a 0.05mm

Dalle misure ricaviamo (poiché ci interessa un valore approssimato non teniamo conto delle incertezze di misura):

diametro del filamento = $19*10^{-5}$ m (nota che 20 divisioni sulla scala della foto corrispondono a 0.1mm)

diametro della spirale = 1.19 mm

n° spire = 11

Lunghezza dei tratti rettilinei del filamento: 3mm

Inoltre la resistività del tungsteno a temperatura ambiente vale ρ =5.65μΩ*cm (vedi tabella).

Calcoliamo la lunghezza del filamento

Circonferenza = 3.74 mm

11 circonferenze = 41.1 mm

+3 mm = 44.10 mm: questo e il valore della lunghezza del filamento

Calcoliamo la sezione del filamento A = 3.14 $(9.5*10^{-5})^2$=$283*10^{-10}$m^2.

Possiamo ora calcolare la resistenza utilizzando la seconda legge di Ohm:

$$R = \rho \frac{l}{A} = 5.60 \cdot 10^{-8}\,\Omega m \frac{0.0441026}{283.385 \cdot 10^{-10}} = 0.087\Omega$$

Quindi a temperatura ambiente la resistenza calcolata del filamento è pari a 86 mΩ in perfetto accordo con il valore misurato precedentemente.

Legge di Stefan-Boltzmann

Misuriamo ora la potenza emessa dalla lampadina con una termopila, e facciamo misure di corrente e di tensione, per ricavare la temperatura del filamento a partire dalle misure di resistenza.

Dobbiamo prendere gli accorgimenti detti nella parte introduttiva per evitare di acquisire valori errati della potenza incidente sul rivelatore dovuti alla radiazione proveniente dall'ambiente.

La tabella seguente costituisce un esempio di raccolta di tensione corrente:

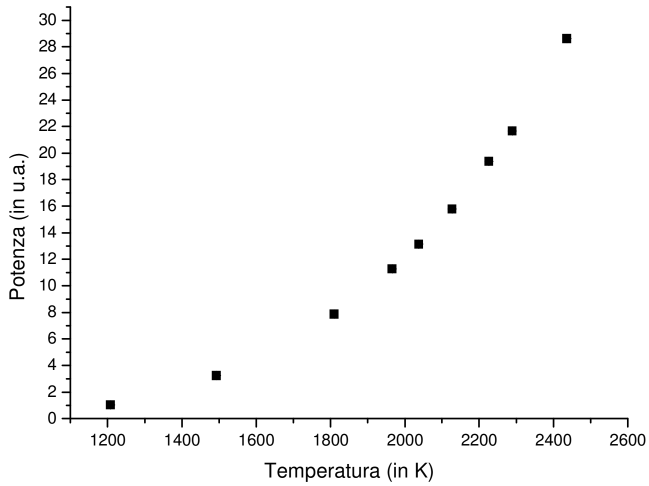
I in A	ΔI in A	V in V	ΔV in V	R in Ω	ΔR in Ω	R_f in Ω	ΔR_f in Ω
2.39	0.01	1.34	0.01	0.561	0.007	0.481	0.009
2.91	0.01	2.03	0.01	0.6989	0.006	0.618	0.008
3.52	0.01	3.01	0.01	0.855	0.005	0.775	0.007
3.86	0.01	3.61	0.01	0.935	0.005	0.855	0.007
4.01	0.01	3.9	0.01	0.973	0.005	0.893	0.007
4.22	0.01	4.3	0.01	1.019	0.005	0.939	0.007
4.47	0.01	4.79	0.01	1.072	0.005	0.992	0.007
4.61	0.01	5.09	0.01	1.104	0.005	1.024	0.007

La penultima colonna permette di calcolare il rapporto $R_f/R_{f300\mathrm{K}}$ e la rispettiva temperatura.

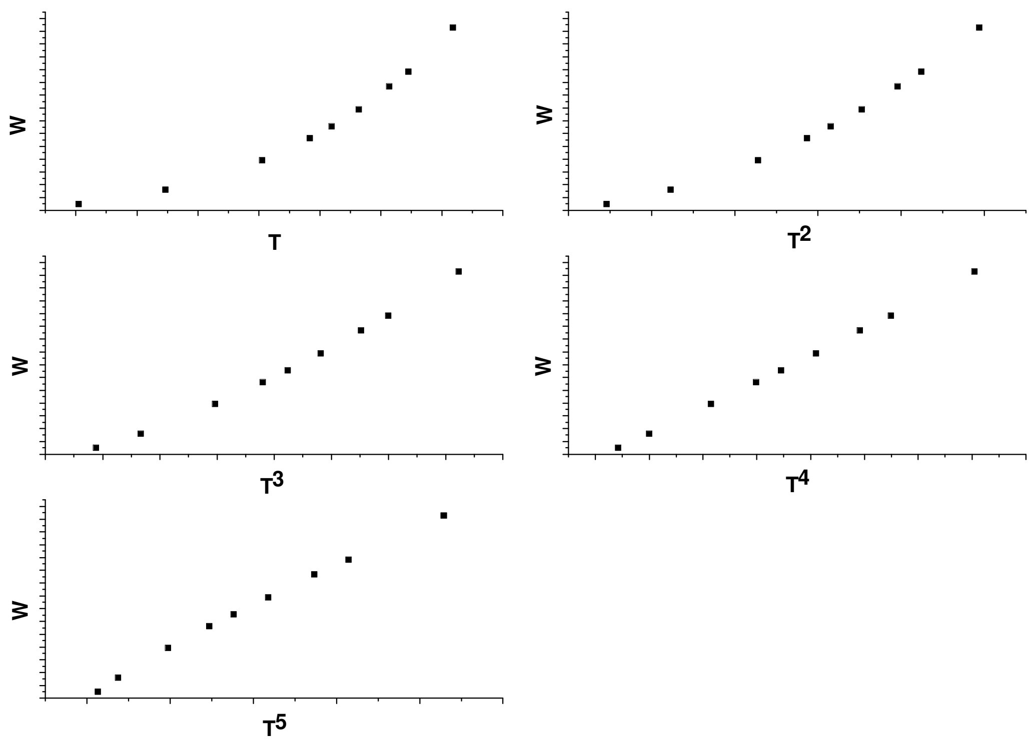
Nella seguente tabella sono riportati i valori ottenuti con, in aggiunta, i valori della corrispondente potenza (in unità arbitrarie u.a.):

$R_f/R_{f300\mathrm{K}}$	$\Delta R_f/R_{f300\mathrm{K}}$	T in K	ΔT in K	W in u.a.	ΔW in u.a.
5.525	0.002	1208	2	1.04	0.02
7.099	0.001	1493	2	3.25	0.02
8.909	0.001	1810	2	7.86	0.02
9.830	0.001	1966	2	11.28	0.02
10.259	0.001	2038	2	13.15	0.02
10.793	0.001	2127	2	15.79	0.02
11.398	0.001	2226	2	19.38	0.02
11.772	0.001	2289	2	21.67	0.02

In un primo momento conviene far tracciare agli studenti un grafico in scala lineare. Il risultato è il seguente:



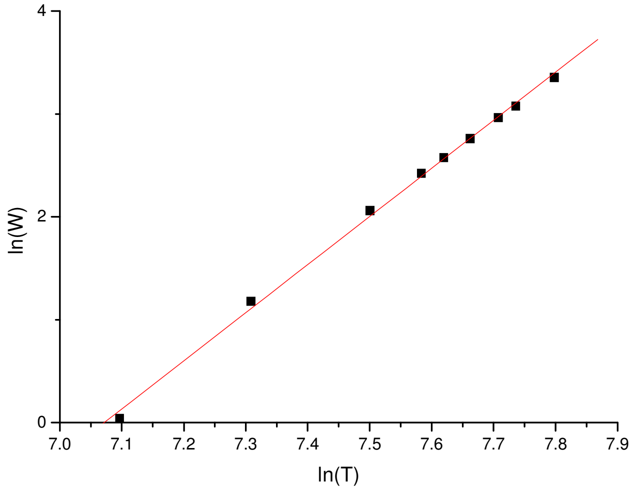
Si fa osservare che il grafico non è lineare. A questo punto si può cercare di linearizzare la funzione provando a riportare i grafici della potenza in funzione di T^2 T^3 ecc. Ciò che si ottiene è la seguente serie di grafici:



Si osserva che il grafico in cui è riportata la potenza emessa in funzione della quarta potenza della temperatura è quello che meglio è approssimato da una retta. Questo è proprio ciò che si andava cercando.

Questo modo di procedere non è molto rigoroso. Un metodo migliore consiste nel riportare il logaritmo della potenza in funzione del logaritmo della temperatura assoluta.

Per completezza riportiamo qui ciò che si ottiene.



Il grafico così ottenuto è ben rappresentato da una retta. Tuttavia la sua pendenza è un po' grande: 4.6. Ricordiamo comunque quanto detto nella parte iniziale in relazione alle approssimazioni che debbono essere fatte e ai problemi sperimentali.